BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

A. Curah Hujan

Unsur iklim yang paling penting di Indonesia merupakan hujan, karena keragamannya sangat baik menurut tempat maupun waktu, hujan juga merupakan salah satu jatuhnya butiran air atau kristal es ke permukaan bumi (Lakitan,2002). Curah hujan merupakan ketinggian air hujan yang terkumpul dalam penakar hujan pada tempat yang datar, tidak meresap, tidak mengalir, dan tidak menyerap. Indonesia merupakan Negara yang memiliki angka hujan yang bervariasi karena daerahnya berada pada ketinggian yang berbeda- beda. Curah hujan 1 mm, artinya dalam luasan satu meter persegi pada tempat yang datar tertampung air hujan setinggi satu milimeter atau terampung air hujan sebanyak satu liter (BMKG, 2017).

Tabel 2. 1 Kriteria Curah Hujan

Curah Hujan(mm)	Keterangan
0-100	Rendah
100- 300	Sedang
300-500	Tinggi
>500	Sangat Tinggi

Pengukuran curah hujan dapat dilakukan secara langsung dengan menampung air hujan yang jatuh, namun tidak dapat dilakukan di seluruh wilayah tangkapan air, akan tetapi dapat dilakukan pada titik yang ditetapkan dengan menggunakan alat pengukur hujan (Triatmodjo, 2008). Alat penakar hujan ada dua macam penakar yaitu penakar hujan otomatis (*Hellman*) dan penakar hujan (*Observasi*). Fungsi Penakar Hujan Otomatis untuk mencatat Intensitas Curah Hujan/ tingkat Kelebatannya dengan cara jika terjadi hujan air masuk ke corong kemudian air mengalir ke tabung pelampung melalui selang dan mengangkat pelampung, kemudian pena yang terhubung merekam data ke kertas pias lalu kertas pias berputar seirama dengan gerakan clock drum. Jika jumlah curah hujan yang tertampung mencapai 10 mm maka air tsb akan tumpah melalui pipa level dan meresat pena ke posisi 0. Alat ukur otomatis memiliki beberapa keuntungan diantaranya yang didapat memiliki tingkat ketelitian yang cukup tinggi, kertas pias digunakan untuk mengetahui waktu kejadian dan integritas hujan dengan periode pencatatan lebih dari sehari.

Gambar 2. 1 Penakar Hujan Otomatis(Hellman)

Penakar Hujan (Observasi) untuk mengukur curah hujan yang akan terjadi. Dengan cara buka gembok pada kran penakar hujan observasi letakkan gelas penakar dibawah corong atau kran kemudian buka kran pelan-pelan dan tunggu sampai air di bak penampung habis, cara bacanya jumlah air hujan yang tertampung di gelas ukur dan catat hasilnya. Jika diperkirakan jumlah curah hujan melebihi 25 mm, sebelum airnya mencapai skala 25 mm krannya di tutup, kemudian dilakukan pembacaan dan catat hasilnya. Kemudian buang airnya dan lanjutkan pengukuran terhadap air yang masih tersisa di bak penakar hujan observasi. Setelah selesai jumlahkan semua hasil pengukuran yang sudah dilakukan, namun pada saat melakukan pembacaan letakkan gelas ukur pada bidang yang datar untuk menghindari kesalahan pembacaan akibat kesalahan paralak.

Gambar 2. 2 Penakar Hujan (Observasi)

B. Prediksi

Perdiksi merupakan suatu proses memperkiraan secara sistematis tentang sesuatu yang paling mungkin terjadi di masa depan berdasarkan informasi masa lalu dan sekarang yang dimiliki, agar selisih antara sesuatu yang terjadi dengan hasil perkiraan dapat di perkecil. Prediksi tidak harus memberi jawaban secara pasti kejadian yang akan terjadi, melainkan berusaha untuk cari jawaban mendekati nilai terbaik yang akan terjadi (Herdianto,2013).

Peramalan *(forecasting)* adalah suatu kemampuan untuk memperkiraan atau menduga keadaan permintaan produk di masa datang yang tidak pasti(Makridakis, 1999). Peramalan *(forecasting)* merupakan suatu tindakan guna mengetahui seberapa besar permintaan pada masa yang akan datang. Peramalan pada umumnya di gunakan untuk memprediksi sesuatu yang kemungkinan besar akan terjadi misalnya kondisi permintaan, banyaknya curah hujan, kondisi ekonomi, dan lain sebagainya.

Berdasarkan sifat ramalan teknik peramalan dibadi menjadi dua bagian utama sebagai berikut(Makridakis, Wheelwright, McGee, 1999):

1. Peramalan Kuantitatif

   Peramalan yang didasarkan atas data kuantitatif masa lalu teknik peramalan kuantitatif sangat beragam yang dikembangkan dari berbagai jenis dan untuk berbagai maksud.setiap teknik mempunyai sifat dan ketepatan dan biaya sendiri yang harus dipertimbangkan dalam memilih metode tertentu.

2. Peramalan Kualitatif

   Peramalan yang didasarkan atas data kualitatif pada masa lalu. Hasil peramalan yang dibuat sangat tergantung pada orang yang menyusunnya.Hal ini penting karena peramalan tersebut ditentukan pemikiran yang bersifat instuisi, pendapat dan pengetahuan serta pengalaman dari penyusunnya. Metode peramalan merupakan suatu cara memperkirakan atau mengestimasi dengan jenis data kualitatif ataupun kuanlitatif yang terjadi di masa depan menurut data yang relevan di masa lalu. Penggunakan metode peramalan ini untuk memprediksi dengan sistematis dan pragmatis atas dasar data yang relevan di masa lalu. Jenis metode dalam peramalan, sebagai berikut :

   a) Metode peramalan yang berdasarkan pada pemakaian analisa keterkaitan antar variable yang diperkirakan dengan variable waktu dengan deret berkala (*time series*).

   b) Metode peramalan yang berdasarkan pada pemakaian analisis pola hubungan antar variable yang hendak diperkirakan dengan variable lain yang menjadi pengaruh selain waktu disebut metode Korelasi atau sebab akibat (*metode causal*).

C. Deret Waktu (*Time Series*)

Deret waktu adalah analisis peramalan suatu variabel prediktor berdasarkan waktu yang lalu variabel respon. Metode deret waktu dalam penelitian ini variabel respon ialah rata-rata dari waktu yang lalu, sekarang, dan yang datang. Metode ini dapat menghaluskan suatu deret waktu(Fadjrin&Wibowo, 2020). Dari suatu rangkaian waktu akan dapat diketahui apakah peristiwa, kejadian, gejala, atau yang diamati itu berkembang mengikuti pola-pola perkembangan yang teratur atau tidak. Sekiranya suatu serangkaian waktu menunjukkan pola yang teratur, maka akan dapat dibuat suatu ramalan yang cukup kuat mengenai tingkah laku gejala yang dicatat, dan atas dasar ramalan itu dapatlah rencana-rencana yang cukup dapat dipertanggung jawabkan.

(Geogre E. P. Box dan Gwilym M. Jenkins, 1970) *Time Series* adalah serangkaian data pengamatan yang terjadi berdasarkan indeks waktu secara berurutan dengan interval waktu tetap. Analisis deret waktu adalah salah satu prosedur statistika yang diterapkan untuk meramalkan struktur probabilistik keadaan yang akan datang dalam rangka pengambilan keputusan.

(Tufte,1983) Plot *time series* adalah bentuk yang paling sering digunakan desain grafis. Dengan satu dimensi berbasis sepanjang ritme reguler detik, menit, jam, hari, minggu, bulan, tahunan, atau ribuan tahun, urutan alami dari skala waktu memberi desain ini kekuatan dan efesiensi interpretasi yang ditemukan dalam pengaturan grafis lainnya.

Konsep dasar dalam Runtun waktu (*Time Series)* :

1. Stationeritas

Stationeritas dalam derat waktu merupakan tidak adanya penurunan data atau data tetap konstan panjang waktu pengamatan dimana keadaan rata-ratanya tidak berubah seiring dengan berubahnya waktu dan data tersebut berada disekitar nilai rata-rata dan varians yang konsta (Santoso,2009). Jika data yang memperlihatkan ketidakstationeras maka ini dapat mengakibatkan kurang tepatnya hasil dari peramalan yang akan dilakukan.

Data yang nonstationer perlu divalidasikan dengan melakukan pengujian kembali. Untuk melihat kestationer atau tidak stationer dapat dilihat dari plot data deret waktu dan plot autokorelasi dapat dengan mudah memperlihatkan stationeritas dari data. Karena kebanyakan data deret waktu atau time series tidak stationer maka perlu melakukan pengujian kembali kestationeritas pada data tersebut, dengan *differencing* . Differencing adalah menghitung berubahan atau selisih nilai observasi. Jika belum stasioner maka dilakukan differencing lagi. Jika varians tidak stasioner, maka dilakukan tranformasi logaritma.

2. Autokorelasi

Auto korelasi Fuction setara (identik) dengan korelasi Pearson untuk data bivariate. Gambarannya sebagai berikut, jika dimiliki sampel data deret waktu $X_1, X_2, \dots, X_n$ dan dapat dibangun pasangan nilai (X_1, X_{k+1}), (X_2, X_{k+2}), … , (X_k, X_n). Dalam analisis data deret waktu untuk mendapatkan hasil yang baik, nilai n harus cukup besar dan autokorelasi disebut berarti jika nilai k cukup kecil dibandingkan dengan n, sehingga autokorelasi lag-k dari sampel data deret waktu yang terbentuk adalah :

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (X_t - \dot{X})(X_t +_k - \dot{X})}{\sum_{t=1}^{n} (X_t - \dot{X})^2} \text{, untuk k = 0,1,2,…,n}$$

Dimana $\dot{X} = \sum_{t=1}^{n} \frac{X_t}{n}$

Keterangan :

Z_t : nilai actual pada waktu ke-t

r_k : nilai estimasi fungsi autokorelasi lag ke-k

Dan perumusan autokorelasi seperti diatas digunakan dalam analisis data deret waktu. Karena r_k merupakanfungsi atas k, maka hubungan autokorelasi dengan lag-nya dinamakan Fungsi Autokorelasi (ACF).

Partial Autokorelasi Function digunakan untuk mengukur tingkat keeratan hubungan antara pasangan data X_t dengan X_{t+k}, setelah pengaruh variable X_{t+1}, X_{t+2}, … , X_{t+k-1} dihilangkan. Perhitungan nilai PACF sampel lag ke-k dimulai dengan menghitung $Ø_{1,1} = r_k$,sedangkan untuk menghitung $Ø_{k,k}$ dilakukan dengan menggunakan rumus sebagai berikut (Wei,2006):

$$\emptyset_{k+1,k+1} = r_{k+1} \frac{-\sum_{j=1}^{k} \emptyset_{kj}\rho_{k+1-j}}{1-\sum_{j=1}^{k} \emptyset_{kj}\rho_{j}}$$

Dan $\emptyset_{k+1,j} = \emptyset_{k}, j - \emptyset_{k+1,k+1} - \emptyset_{k,k+1-j}; j = 1,2, \dots, k$

Plot ACF dan plot PACF dapat membantu menentukan urutan istilah *Moving Average* dan dapat membantu menemukan istilah Regresi Otomatis.

(Durbin,1960) telah memperkenalkan metode yang lebih efesien untuk menyelesaikan persamaan Yule Walker, nilai PACF dapat di hitung secara rekursi dengan menggunakan persamaan berikut :

$$\emptyset_{k,k} = \frac{\rho_k - \sum_{j=1}^{k=1} \emptyset_{k=1}\rho_{k=j}}{1-\sum_{j=1}^{k=1} \emptyset_{k=1}\rho_{k}},$$

Dimana, $\emptyset_{k,j} = \emptyset_{k-1},_{j} - \emptyset_{k,k}\emptyset_{k+1,k-j}$ $, untuk\ j = 1,2, \dots, k-1$

Sehingga himpunan dari $\emptyset_{k,k}, \{\emptyset_{k,k}; k = 1,2, ...\}$, disebut sebagai Partial Autokorelasi Function (PACF). Fungsi $\emptyset_{k,k}$ menjadi notasi standard untuk autokorelasi parsial antara observasi X_t dan X_{t+k} dalam analisis time series. Identifikasi model AR dan MA, yaitu pada *Autoregressive* berlaku ACF akan menurun secara bertahap menuju nol dan *Moving Average* berlaku ACF menuju ke-0 setelah lag ke-q sedangkan nilai PACF model AR yaitu $\emptyset_{k,k}$ =0, k>p dan model MA yaitu $\emptyset_{k,k}$= 0, k >q (Wei,2006).

3. Tren *(Trend)*

Trend adalah suatu kedaan data yang menaik atau menurun dari waktu ke waktu. Ada beberapa tehnik yang sering digunakan adalah metode kuadrat terkecil *(least square method).* Pertimbangkan trend waktu deterministik yang dinyatakan sebagai berikut (Cryer & Chan, 2008):

$$\mu_t = \beta_0 + \beta_1 t \qquad (2.3.\ 1)$$

Dimana kemiringan dan intersep, $\boldsymbol{\beta_0\ dan\ \beta_1}$ masing-masing adalah paramenter yang tidak diketahui. Itu merupakan metode klasik kuadrat terkecil (atau regresi) adalah untuk memilih sebagai perkiraan nilai $\boldsymbol{\beta_0 dan\ \beta_1}$ yang meminimalkan

$$\boldsymbol{Q(\beta_0, \beta_1) = \sum_{t=1}^{n} [Y_t - (\beta_0 + \beta_1 t)]^2}$$

Solusinya dapat diperoleh dalam beberapa cara, misalnya : dengan menghitung parsial turunan sehubungan dengan kedua β, dengan hasil yang sama dengan nol dan menghasilkan persamaan linier untuk β. Dapat dinotasikan solusi dari $\boldsymbol{\beta_0 dan\ \beta_1}$**.** Didapat :

$$\beta_1 = \sum_{t=1}^{n} (Y_t - \hat{Y})(t - \bar{t}) / \sum_{t=1}^{n} (t - \bar{t})$$

$$\beta_0 = \hat{Y} - \beta_1^2\ \bar{t}$$

Dimana $\bar{t} = (n + 1)/2$ adalah rata-rata 1,2,…,n. Rumus-rumus ini dapat disederhanakan beberapa hal dan versi rumus terkenal. Namun telah dianggap perhitungan akan dilakukan oleh perangkat lunak statistik.

D. Proses White Noise

Proses white noise merupakan salah satu bentuk proses stasioner. Proses ini di definisikan sebagai bentuk variabel random yang berurutan tidak saling berkorelasi dan mengikuti distribusi tertentu. Dengan didefinisikan sebagai urutan variabel acak independen yang terdistribusi secara identik $\{e_t\}$. kepentingannya bukan berasal dari fakta bahwa itu adalah model yang menarik tetapi dari fakta bahwa banyak proses yang berguna dapat dibangun dari white noise. Rata-rata dari proses ini adalah konstan $\mu_a = E(\varepsilon_t)$ dan diasumsikan bernilai nol dan mempunyai variansi konstan $(\varepsilon_t) = \sigma_t^2$. Nilai kovarian dari proses ini $\gamma_k = Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}) = 0$ untuk semua $\neq 0$.

Suatu proses white noise memiliki fungsi autokovarian, yaitu:

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma_t^2, untuk\ k = 0 \\ 0, untuk\ nilai\ k\ lainnya \end{cases}$$

Nilai ACF-nya adalah $\rho_k = \begin{cases} 1, untuk\ k = 0 \\ 0, untuk\ nilai\ k\ yang\ lain \end{cases}$

Nilai PACF-nya adalah $\emptyset_{k,k} = \begin{cases} 1, untuk\ k = 0 \\ 0, untuk\ nilai\ k\ yang\ lain \end{cases}$

E. Model ARIMA

Autoregressive Integrated Moving Average (ARIMA) telah dipelajari secara mendalami oleh George Box dan Gwilyn Jenkins (1976), dan nama beliau sering disebut dengan ARIMA yang diterapkan untuk analisis deret waktu, peramalan, pengendalian. Box dan Jenkins secara efektif telah berhasil mencapai kesepakatan mengenai informasi relevan yang diperlukan untuk memahami dan menggunakan model-model ARIMA untuk deret waktu satu berubah (*univariate*). Model ARIMA terdiri dari dua aspek *Autoregresive dan Moving Average* (rata-rata bergerak).

Autoregressive Integrated Moving Average (ARIMA) adalah kelas model yang paling umum untuk memprediksi deret waktu yang dapat ditempatkan dengan transformasi seperti *differencing* dan *logging*. Dalam pemodelan ARIMA (*p*, *d*, *q*), parameter *p*, *d* dan *q* menunjukkan urutan bagian *Autoregresive* (AR), proses *differencing* dan *Moving Average* (MA), masing-masing Model ARIMA memprediksi nilai dalam rangkaian waktu respons sebagai kombinasi linear dari nilai sebelumnya sendiri, kesalahan sebelumnya, dan nilai saat ini dan masa lalu dari seri waktu lainnya. Untuk menentukan ARIMA (*p*, *d*, *q*) yang sesuai, prosedur Box-Jenkins digunakan untuk mengevaluasi stasioneritas dalam varian dan rata-rata kejadian.

Nilai konstanta p dan q, biasanya didapatkan dari estimasi gambar Correlogram ACF (*Autocorrelasion Function*) dan PACF *(Partial Autocorrelasion Function)*. Sedangkan untuk konstanta d, umumnya dilakukan dengan trial error terhadap nilai p, d, dan q yang sudah didapatkan.

Model Box-Jenkins terdiri dari beberapa model, yaitu *Autoregresive* (AR), *Moving Average* (MA), *Autoregresive- Moving Average* (ARMA), dan *Autoregresive Integrated Moving Average* (ARIMA).

1. Proses *Autoregresive* (AR)

   Autoregresive adalah nilai sekarang sutu proses dinyatakan sebagai jumlah tertimbang nilai-nilai yang lalu ditambah satu sesatan (goncangan random) sekarang. Jadi dapat di pandang Yt diregresikan pada p nilai Y yang lalu. *Autoregresive* adalah suatu bentuk regresi tetapi bukan yang menghubungkan variabel tak bebas, melainkan menghubungkan nilai-nilai sebelumnya pada *time series* tertentu (Makridakis, Wheelwright, McGee, 1995).

Model umum dari waktu Autoregresive sebagai berikut :

$$\mathrm{Y_t} = \emptyset_1 \mathrm{Y_{t-1}} + \emptyset_2 \mathrm{Y_{t-2}} + \ldots + \emptyset_\mathrm{p} \mathrm{Y_{t-p}} + \mathrm{e_t} \quad (2.\ 2.1)$$

Dengan :

Y_t : nilai variabel pada waktu ke-t

Y_{t-1}, $Y_{t-2,\ldots,}$ Y_{t-p} : nilai masa lalu dari *time series* yang bersangkutan pada waktu t-1,t-2,…,t-p.

Keterangan :

$\emptyset_i$: koefisien regresi, i :1,2,3,…,p

e_t: nilai error pada waktu ke-t

P : orde AR

$$\left(1 - \emptyset_1 B - \emptyset_2 B_2 - \ldots - \emptyset_p B_p\right) Y_t = e_t$$

$$\emptyset_p(B) Y_t = e_t$$

Karena, $\emptyset_\mathrm{p}(\mathrm{B}) = (1 - \emptyset_1 \mathrm{B} - \emptyset_1 \mathrm{B}_2 - \ldots - \emptyset_\mathrm{p} \mathrm{B}_\mathrm{p})$ berhingga, tidak ada batasan yang dibutuhkan paramenter dari proses autoregresive untuk menjamin inverible. Oleh karena itu proses auturegresive selalu invertible, supaya proses ini stasioner, akar-akar dari $\emptyset_\mathrm{p}(\mathrm{B}) = 0$ harus berada diluar lingkaran satuan.

a. Autoregressive orde pertama (AR(1))

Sudah dipertimbangkan model Autoregressive orde pertama, yang di singkat AR(1), secara rinci. Asumsikan seri ini stasioner dan memuaskan (Cryer & Chan, 2008).

$$\mathrm{Y_t} = \phi \mathrm{Y_{t-1}} + e_t \quad (2.\ 1.2)$$

Dimana telah menjatuhkan subskrip 1 dari koefisien φ untuk kesederhanan. Seperti biasa, di bab-bab awal ini, telah diasumsikan bahwa rata-rata proses telah dikurangi sehingga rata-rata seri adalah nol. Kondisi untuk stasioneritas akan dipertimbangkan nanti. Pertama-tama mengambil varian dari kedua sisi Persamaan (2. 3.1) dan memperoleh:

$$\gamma_0 = \phi^2\gamma_0 + \sigma_e^2 \tag{2. 1.3}$$

Memecahkan untuk hasil γ_0

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_e^2}{1-\phi^2} \tag{2. 1.4}$$

Perhatikan implikasi langsungnya $\phi^2 < 1$ atau $|\phi| < 1$. Sekarang ambil Persamaan (2.1.1). Kalikan kedua sisi dengan dari $\mathrm{Y_{t-k}}(k = 1,2, \ldots)$, dan mengambil nilai yang diharapkan

$$E(\mathrm{Y_{t-k}Y_t}) = \phi E(\mathrm{Y_{t-k}Y_{t-1}}) + E(\mathrm{e_tY_{t-k}})$$

atau

$$\gamma_k = \phi\gamma_{\mathrm{k-1}} + E(\mathrm{e_tY_{t-k}})$$

Karena series diasumsikan stasioner dengan nol rata-rata dan karena e_t independen Y_{t-k}, telah didapatkan

$$E(\mathrm{e_tY_{t-k}}) = E(e_t)E(Y_{t-k}) = 0$$

dan juga

$$\gamma_k = \phi \mathrm{Y_{k-1}} \text{ untuk k=} \tag{2. 1.5}$$
1,2,3, …

Pengaturan k=1, di dapat $\gamma_1 = \phi\gamma_0 = \phi\sigma_e^2/(1-\phi^2)$. Dengan k=2, diperoleh $\gamma_2 = \phi^2\sigma_e^2/(1-\phi^2)$. Sekarang mudah untuk melihatnya secara umum

$$\gamma_k = \phi^k \frac{\sigma_e^2}{1-\phi^2} \quad (2.\ 1.6)$$

Dan dengan demikian,

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi^k \text{, untuk} \quad (2.\ 1.7)$$

k=1,2,3, …

Karena, besarnya fungsi autokorelasi menurun secara eksponensial karena jumlah kelambatan, k, meningkat. Jika $0 < \phi < 1$, semua korelasi positif, jika $-1 < \phi < 0$, autokorelasi lag 1 negatif ($\rho 1 = \varphi$) dan tanda – tanda suksesi autokorelasi bergantian dari positif ke negatif, dengan magnitudes mereka menurun secara eksponensial.

2. Proses *Moving Average* (MA)

Proses *Moving Average* adalah proses yang menyatakan bahwa nilai deret berkala pada waktu t dipengaruhi oleh unsur kesalahan. Pada saat ini dan mungkin unsur kesalahan terbobot pada masa lalu.

Bentuk umum suatu model *Moving Average* orde q dinyatakan MA(q) sebagai berikut (Cryer & Chan, 2008):

$$Y_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} \ \dots - \theta_q e_{t-q} : e_t \sim N(0, \sigma_t^2) \quad (2.\ 2.1)$$

dengan, X_t: nilai variabel pada waktu ke-t

e_t, e_{t-1}, $e_{t-2,\dots}$, e_{t-q} = nilai –nilai dari error pada waktu t, t-1,t-2,…,t-q dan e_t diasumsikan white noise dan normal.

θ_i : koefisien regresi , i: 1,2,3,…,q

e: nilai error pada waktu ke-t

q : orde MA

persamaan diatas dapat ditulis menggunakan operator *backshift (B)* sebagai berikut :

$Y_t = \theta_q(B)e_t$ Dimana $\theta_q(B) = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B_2 - \ldots - \theta_q B_q)$
Fungsi autokovariansi dari proses *moving average* orde q

$$\gamma_k = E(Y_t . Y_{t-k})$$

$\gamma_k = E[(e_t - \theta_1\, e_{t-1} - \theta_2\, e_{t-2} - \ldots - \theta_q e_{t-q})\ x\ (e_{t-k} - \theta_1\, e_{t-k\,-1} - \theta_2\, e_{t-k-2} - \cdots - \theta_q\, e_{t-k-q})]$ Oleh karena itu, variasi dari proses ini adalah:

$\gamma_0 = \left(1 + \theta_{12} + \theta_{22} + \cdots + \theta_q^2\right)\sigma^2\alpha$ dan,

$\gamma_k = \left\{\left(-\theta_k + \theta_1\, \theta_k +_1 + \theta_1\, \theta_k +_2 + \cdots + \theta_{q-k}\, \theta_q\right)\sigma^2\alpha\right\}$,k=1,2,…,q

k > q

Jadi fungsi autokorelasi dari proses MA(q) adalah :

$\gamma k = \left\{\frac{(-\emptyset_k + \emptyset_1\, \emptyset_k +_1 + \emptyset_1\, \emptyset_k +_2 + \cdots + \emptyset_q -_k\, \emptyset_q)}{1 + \emptyset_{12} + \emptyset_{22} + \cdots + \emptyset q^2}\right\}$ k=1,2,…, q

k > q

Karena, $\rho_k = (1 + \theta_{12} + \theta_{22} + \cdots + \theta_q^2) < \infty$, proses *moving average* berhingga selalu stasioner. Proses *moving average invertible* jika akar-akar dari berada diluar lingkaran satuan.

b. Proses *Moving Average* orde pertama (MA(1))

Sekali lagi, itu adalah instruksi untuk mempertimbangkan model *Moving Average* orde pertama, yang di singkat MA(1), secara rinci. Modelnya adalah $Y_t = e_t - \theta e_{t-1}$. Sejak hanya satu θ yang terlibat, telah dijatuhkan subskrip yang berlebihan 1. Jelasnya E(Y_t) = 0 dan $Var(Y_t) = \sigma_e^2(1+\sigma^2)$. Sekarang:

$$\begin{aligned} Cov(Y_{t'}Y_{t-1}) &= Cov(e_t - \theta e_{t-1}, e_{t-1} - \theta e_{t-2}) \\ &= Cov(-\theta e_{t-1}, e_{t-1}) = -\theta\sigma_e^2 \end{aligned}$$

Dan,

$$\begin{aligned} Cov(Y_{t'}Y_{t-2}) &= Cov(e_t - \theta e_{t-1}, e_{t-2} - \theta e_{t-3}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Karena tidak ada e dengan subskrip yang sama antara Z_t dan Z_{t-2}. Demikian pula $Cov(Y_{t'}Y_{t-1}) = 0$, Artinya proses tidak memiliki korelasi di luar lag 1. Fakta ini akan menjadi penting nanti ketika perlu memilih model yang cocok untuk data nyata.

Singkatnya, untuk model MA(1) $Y_t = e_t - \theta e_{t-1}$, (Cryer & Chan, 2008)

$$E(Y_t) = 0$$

$$\gamma_0 = Var(Y) = \sigma_e^2(1+\theta^2)$$

$$\gamma_1 = -\theta\sigma_e^2 \qquad (2.2.2)$$

$$\rho_1 = (-\theta)/(1+\theta^2)$$

$$\gamma_k = \rho_k = 0 \quad \text{for } k \geq 2$$

3. Proses *Autoregresive Integrated Moving Average* (ARIMA)

ARIMA adalah metode tradisional yang masih digunakan dalam teknik prediksi, terutama dalam prediksi iklim (Murat et al., 2018).Model modifikasi model ARIMA (p,q) dengan memasukkan operator *differencing* menghasilkan persamaan model ARIMA, adanya unsur differencing karena merupakan syarat untuk menstasionerkan data, dalam notasi operator shift mundur, *differencing* dapat ditulis W_t = $(1\text{-}B)^d$ Y_t, dimana W_t merupakan data dinotasikan dengan model ARIMA (p,d,q):

$$\left(1-\emptyset_1 B-\cdots-\emptyset_p B^p\right)(1-B)^d Y_t=\left(1-\theta_1 B-\cdots-\theta_q B^q\right) e_t$$

$\emptyset_p(B)(1-B)^d Y_t = \ \theta_q(B)e,$

dimana : $\emptyset_p(B) = 1-\emptyset_1 B-\cdots-\emptyset_p B^p$ (untuk AR (p))

$\emptyset_q(B) = 1-\emptyset_1 B-\cdots-\emptyset_q B^q$ (untuk MA (q))

Dengan $\dot{X}_t = X_t - \mu$

p: orde dari AR

q: order dari MA

$\emptyset_p$: koefisien orde p

$\emptyset_q$: koefisien orde q

B: backward shift

$(1-B)^d$: orde differencing non musiman

d: banyaknya differencing yang dilakukan untuk menstasionerkan data terhadap mean

e_t: nilai residual(error) pada waktu ke-t

$\emptyset_0$: nilai konstanta $\emptyset_0 = \mu(1-\emptyset_1-\emptyset_2-\cdots-\emptyset_p$

F. Prosedur ARIMA (Box-Jenkins)

1. Identifikasi Model

Tahap identifikasi melibatkan pengecekan stasioneritas dan normalitas data deret waktu. Awalnya, seri data dianalisis untuk memeriksa apakah data itu diam dan jika ada musiman. Struktur korelasi temporal seri waktu bulanan diidentifikasi menggunakan Autocorrelation (ACF) dan Partial

Autocorrelation Function (PACF). Kestasioneran suatu *time series* dapat dilihat dari plot ACF yaitu koefisien autokorelasinya menurun menuju nol dengan cepat, biasanya setelah *lag* ke-3 atau ke-3. Bila data tidak stasioner maka dapat dilakukan pembedaan atau *differencing*, orde *differencing* sampai deret menjadi stasioner dapat digunkan untuk menentukan nilai *d* pada ARIMA (*p*,*d*,*q*).

Model AR dan MA dari suatu *time series* maka dapat dilihat dari grafik ACF dan PACF sebagai berikut :

a) Jika terdapat *lag* autukorelasi sebanyak *q* yang berbeda dari nol secara signifikan maka prosesnya model MA (q)
b) Jika terdapat lag autokorelasi parsial sebanyak *p* yang berbeda dari nol secara signifikan maka prosesnya AR (p), secara umum jika terdapat *lag* autokorelasi parsial sebanyak *p* yang berbeda dari nol secara signifikan, terdapat *lag* autokorelasi sebanyak *q* yang berbeda dari nol secara signifikan dan *d* pembedaan maka prosesnya model ARIMA (*p*,*d*,*q*).

ACF dan PACF dapat digunakan untuk mengidentifikasi model dugaan yaitu dengan mengidentifikasi nilai p dan q, dimana menurun secara eksponensial atau membentuk gelombang sinus sama halnya dengan menurun secara perlahan-lahan mendekati nilai nol (*dying down*). Sedangkan *Cut Off* (terpotong) setelah lag-p atau lag-q yaitu menurun secara dratis,seperti pada tabel berikut:

Tabel 2. 2 Struktur ACF dan PACF

Model	ACF	PACF
AR(p)	Menurun secara eksponensial atau membentuk gelombang sinus terendam *(Dies Down)*	*Cut off* (terpotong) setelah lag ke-p
MA(q)	*Cut off* (terpotong) setelah lag ke-q	Menurunkan secara eksponensial atau membentuk gelombang sinus terendam *(Dies Down)*
ARMA (p,q)	Menurunkan secara eksponensial atau membentuk gelombang sinus terendam *(Dies Down)*	Menurunkan secara eksponensial atau membentuk gelombang sinus terendam *(Dies Down)*
AR (p) atau MA (q)	*Cut off* (terpotong) setelah lag ke-p	*Cut off* (terpotong) setelah lag ke-p

(Wei, 2006)

2. Penaksiran Paramenter

Primer parameter dilakukan dari AR dan MA pada tahap identifikasi. Evaluasi pendahuluan ini kemudian digunakan untuk menghitung parameter akhir dengan prosedur yang dijelaskan oleh Box dan Jenkins (1976). Kesalahan standar yang dihitung untuk parameter yang relevan adalah kecil dibandingkan dengan nilai parameter. Oleh karena itu, parameternya signifikan secara statistik.

Dalam penaksiran paramenter ada dua cara yaitu :

a. Trial and Error (cara coba- coba), menguji beberapa nilai yang berbeda dan memilih satu nilai tersebut (atau sekumpulan nilai, apabila terdapat lebih dari satu parameter yang akan ditaksir) yang meminimumkan jumlah nilai kuadrat nilai sisa (*sum of squared residual*).

b. Perbaikan secara iterative, memilih taksiran awal dan kemudian membiarkan program komputer memperhalus penaksiran tersebut secara iterative.

3. Pemeriksaan Diagnostik

Pemeriksaan diagnostik ini dapat dilakukan untuk mengamati apakah residual dari model ter-estimasi merupakan white noise atau tidak. Model dikatakan baik jika nilai error bersifat random, artinya sudah tidak mempunyai pola tertentu lagi. Untuk melihat kerandoman nilai error dilakukan pengujian terhadap nilai koefisien autokorelasi dari error, dengan menggunakan statistic sebagai berikut (Wei, 2006):

a. Uji Ljung-Box

$$Q = n'(n' + 2) \sum_{k=1}^{m} \frac{r_k^2}{n'-k}$$

Menyebar secara Chi Kuadrat (x^2) dengan derajat bebas (db) = (k-p-q-P-Q) dimana :

n’ = n-(d+SD)

d = ordo pembedaan bukan faktor musiman

D = ordo pembeda faktor musiman

S = jumlah periode per musim

m = lag waktu maksimum

r_k = autokorelasi untuk *time series* lag 1,2,3,4, … , k

kriteria pengujian :

Jika $\leq \chi^2(\alpha, db)$, berarti : nilai error bersifat random (model dapat diterima)/ H0 diterima.

Jika $Q > \chi^2(\alpha, db)$, berarti : nilai error tidak bersifat random (model tidak dapat diterima)/ H0 ditolak.

4. Pemilihan Model Terbaik

Penentuan model terbaik dilakukan melalui kebaikan model yang diperoleh dari nilai sisa. Terdapat beberapa metode yang dapat digunakan untk uji kebaikan model berdasarkan nilai sisa, salah satunya MAPE *(Mean Absolute Percantage Error)*. Untuk menghitung MAPE digunakan rumus sebagai berikut :

$$MAPE = \sum_{t=1}^{n} \frac{|Y_t - \hat{Y}_t|}{n} \times 100\%$$

Dimana :

n : banyaknya observasi

Y_t : nilai actual pada waktu ke-t

$\hat{Y}_t$: nilai ramalan pada waktu ke-t

5. Peramalan dengan model Arima

Setelah menetapkan model terbaik yang dipilih, tahap selanjutnya yaitu peramalan dengan metode ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average) dengan bantuan Software SPSS, Minitab, Microsoft Excel, dan lain-lain.